数理解析研究所講究録
第1701巻 2010年 169-179

2原子非線形格子における multi-site Discrete Breatherの存在と安定性

NTTコミュニケーション科学基礎研究所　吉村 和之 (Kazuyuki Yoshimura)
NTT Communication Science Laboratories

概要

Discrete Breatherとは，非線形格子系における空間的に局在した周期振動解である．2原子Fermi-Pasta-Ulam型格子に関し，複数の励起格子点からなるmulti-site Discrete Breather解の存在を証明し，解の線形安定性を判別するための条件件を与えた．

1 はじめに

非線形格子系においては，系の離散性と非線形性に起因して，空間的に局在した振動モードが存在し得ることが知られている．この局在モードは，Discrete Breather (DB)，または，Intrinsic Localized Mode (ILM) と呼ばれている．DBの存在は，武野らにより最初に指摘され [1, 2]，以来，DBに関する多数の研究がなされている (例えば，レビュー論文 [3, 4, 5, 6] 参照). DBの存在は，非線形性と空間的離散性を有する力学系において普遍的な現象と考えられており，実際に種々の系において実験的に観測されている．例えば，ジョセフソン結合素子系 [7, 8]，非線形光導路アレイ [9]，マイクロカンチレバーアレイ [10] 等で観測されている．

数理的な観点からは，DBは運動方程式の空間的に局在した周期解として特徴付けられる．これまでに，DBを表す局在周期解の厳密な存在証明が，種々の手法により与えられている．最初の存在証明は，MacKayとAubryにより，各粒子がオンサイトポテンシャルと弱い相互作用ポテンシャルを持つような非線形格子系のクラスに対して与えられた [11]．例えば，非線形Klein-Gordon格子モデルなどが，このクラスに含まれる．anti-integrable limit，もしくは，anti-continuous limitと呼ばれる相互作用が無い極限では，系は各粒子がオンサイトポテンシャル中を独立に振動する振動子集団となる．この極限で，1個の粒子だけが周期振動をし，他の粒子が静止しているような自明な局在周期解が存在する．MacKayとAubryは，周期関数の空間で陰関数定理を用いて，自明な局在周期解が弱い相互作用が在る場合に延長可能であることを証明している．anti-continuous limitにて複数個の粒子が振動するような自明な局在周期解の延長に関する証明も与えられている [12]．文献 [13] では，2原子Fermi-Pasta-Ulam (FPU) 型格子に関して，上記とは異なるタイプのanti-continuous limitが提案されている．2原子FPU型格子とは，異なる質量を持つ粒子が交互に並び，再隣接粒子が非線形相互作用する格子である．この系において，質量比がゼロとなる極限がanti-continuous limitとなり，重い粒子が静止した状態で軽い粒子のみが独立に振動する．この極限では，1個の軽い粒子のみ振動し他の粒子が静止状態であるような自明なDB解が存在する．Liviらは，このDB解が質量比がゼロでない場合に延長可能であることを証明している．上記以外のanti-continuous limitを持たないような格子系に対しても，異なる手法により，DB解の存在証明が与えられている [14, 15, 16, 17].

上述のように，DB解の存在については，種々の格子系において証明がなされている．一方，DBに関する他の重要な問題として，その安定性評価が挙げられる．しかしながら，DB解の線形安定性解析を行う為の解析的手法は充分に確立されていない．そのため，DB解の線形安定性に関する厳密な結果は，いまだ十分ではない．これまでのところ，オンサイトポテンシャルと弱相互作用ポテンシャルを持つ格子系について，single-site DB（1格子点のみ励起しているDB）が線形安定であることが示されている[3]．また，非線形Klein-Gordon格子については，連続した複数格子点が励起しているmulti-site DBについて線形安定性を判別するための条件が明らかにされている[18, 19, 20]．しかしながら，他の格子系，FPU型格子などについては，DB解の安定性は十分には明らかにされていない．

先行研究[21]において，FPU型格子に適用可能なDBの存在証明，および，線形安定性解析の手法を提案した．提案手法を2原子FPU型格子に適用し，連続した1～3個の格子点が励起しているDB解について，存在証明と線形安定性評価を与えた．本研究では，結果を一般化し，連続した任意個数の格子点が励起しているようなDB解の存在を証明し，解の線形安定性を判別するための条件を与える．本稿の構成は，以下の通りである．2節で，2原子FPU型格子モデルを説明する．3節で，主結果を述べる．4節で，定理の証明のアウトラインを述べるための準備を行う．5節で，証明のアウトラインを述べる．

2　2原子FPU型格子モデル

本研究では，直線上に並んだ粒子が再隣接粒子と非線形相互作用するような1次元2原子非線形格子系を考える．系のハミルトニアンは次式で与えられる．

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2m_n} P_n^2 + \sum_{n=1}^{N} V(Q_n - Q_{n-1}) \tag{1}$$

ここで $Q_n \in \mathbb{R}$，$P_n \in \mathbb{R}$ は，それぞれ，粒子の座標と運動量を表す．m_n は，n 番目の粒子の質量を表し，$m_{2j-1} = 1$，$m_{2j} = \bar{m}$，$j = 1, 2, \ldots, N/2$，ただし，$\bar{m} > 1$ とする．境界条件としては，固定端条件 $Q_0 = Q_N = 0$ を仮定する．したがって，系の自由度は $N-1$ である．N は偶数と仮定しておく．相互作用ポテンシャル V として，以下の形を仮定する．

$$V(X) = W(X, \mu) + \frac{1}{k} X^k \tag{2}$$

上式で，$k \geq 4$ は偶数とする．$\mu \in \mathbb{R}^l$ はパラメータであり，$O \subseteq \mathbb{R}^l$ を $\mu = 0$ の近傍とする．関数 $W(X, \mu) : \mathbb{R} \times O \to \mathbb{R}$ は，X と μ に関して C^2 級で $W(X, 0) = 0$ を満たすと仮定する．

本稿で示す結果は，充分大きな $\bar{m}$ に対して成立するものである．極限 $\bar{m} \to \infty$ には，特異性があるかのように見えるが，実際には，以下で定義するパラメータ ε を導入すれば，この極限に特異性は無いことが分かる[13]．

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\bar{m}}} \tag{3}$$

パラメータ ε を用いて，新座標変数 q_n を以下のように定義する．

$$q_n = \begin{cases} Q_n & \text{if } n = 2j-1, \\ \varepsilon^{-1} Q_n & \text{if } n = 2j, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, N/2 \tag{4}$$

ハミルトニアン (1) は，新変数では以下のように変換される．

$$H=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{2}p_n^2+\sum_{j=1}^{N/2}\Big[V(\varepsilon q_{2j}-q_{2j-1})+V(q_{2j-1}-\varepsilon q_{2j-2})\Big] \tag{5}$$

ただし，p_n は q_n に共役な運動量であり，$p_{2j-1}=P_{2j-1}$，$p_{2j}=\varepsilon P_{2j}$ のように定義される．境界条件は，$q_0=q_N=0$ である．ハミルトニアン (5) より導出される運動方程式は，次式で与えられる．

$$\ddot{q}_{2j-1} = V'(\varepsilon q_{2j}-q_{2j-1})-V'(q_{2j-1}-\varepsilon q_{2j-2}) \tag{6}$$

$$\ddot{q}_{2j} = \varepsilon V'(q_{2j+1}-\varepsilon q_{2j})-\varepsilon V'(\varepsilon q_{2j}-q_{2j-1}) \tag{7}$$

これらの運動方程式は，$\varepsilon=0$ において互いに分離することが分かる．以下では，変数 q_n, p_n を用い，ハミルトニアン (5) に対して結果の記述を行うものとする．

3 主結果

同次ポテンシャル系の anti-continuous limit，すなわち，$\varepsilon=0$ かつ $\mu=0$ の場合を考える．この場合，以下の形をした運動方程式 (6), (7) の周期解が存在する．

$$q_{2j-1}=2^{-1/(k-2)}\sigma_{2j-1}\varphi(t),\quad q_{2j}=0,\qquad j=1,\ldots,N/2 \tag{8}$$

ここで，$\sigma_{2j-1}\in\{-1,0,1\}$ である．$\varphi(t)$ は以下の微分方程式の周期解を表す．

$$\ddot{\varphi}+\varphi^{k-1}=0 \tag{9}$$

この式は，同次ポテンシャル中を振動する 1 粒子の運動を記述する方程式と見なすことができ，明らかに周期解を持つ．方程式 (9) は，積分

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{k}\varphi^k=h \tag{10}$$

を持つ．式中の $h>0$ は積分定数である．解 $\varphi(t)$ の周期 T は，定数 h に依存し，次式で与えられる．

$$T=2\sqrt{2}\,h^{-(1/2-1/k)}\int_0^{k^{1/k}}\frac{1}{\sqrt{1-x^k/k}}\,dx \tag{11}$$

式中の積分値は h に依存しないので，h が 0 から $+\infty$ まで変化するときに，周期 T が $+\infty$ から 0 まで連続的に変化する．このことは，任意に与えられた $T>0$ に対し，T を周期に持つような (9) 式の周期解 $\varphi(t)$ が存在することを意味している．したがって，任意に与えられた $\sigma=(\sigma_1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{2j-1},\ldots,\sigma_{N-1})\in\{-1,0,1\}^{N/2}$ と $T>0$ に対し，(8) 式で与えられる周期 T の運動方程式の解が存在する．この周期解を，$\Gamma(t;\sigma,T)$ と表すことにする．すなわち，(8) 式で与えられる q_n と $p_n=\dot{q}_n$ を用いて，$\Gamma(t;\sigma,T)=(q_1(t),\ldots,q_{N-1}(t),p_1(t),\ldots,p_{N-1}(t))$ である．

各 σ_{2j-1} は，$-1,0,1$ の 3 通りの値を取り得るので，$3^{N/2}$ 通りのコード列 σ が存在する．本研究では，それらの内，以下で定義する集合 $S\subset\{-1,0,1\}^{N/2}$ に属するコード列を扱う．

$$S=\left\{\sigma;\ {}^{\exists}m\geq 1,\ 2\leq^{\exists} j_0\leq N/2-m\ \text{ s.t. }\sigma_{2j-1}=\left\{\begin{array}{ll}\pm 1 & \text{if } j_0\leq j\leq j_0+m-1\\ 0 & \text{otherwise}\end{array}\right.\right\} \tag{12}$$

すなわち，連続する m 個の σ の成分が ±1 であり，それら以外は 0 であるようなコード列を扱う．例えば，$(\ldots,0,1,1,-1,0,\ldots)\in S$ であるが，$(\ldots,0,1,1,0,-1,0,\ldots)\notin S$ である．両端の格子点 $n=1,N-1$ が励起される場合も除外してある．次に，$m\geq 2$ の場合について，隣接する励起格子点の位相差を表すパラメータ δ_j を次式で導入する．

$$\delta_j=\begin{cases}+1 & \text{if } \sigma_{2(j_0+j-1)-1}=\sigma_{2(j_0+j)-1}\\ -1 & \text{if } \sigma_{2(j_0+j-1)-1}=-\sigma_{2(j_0+j)-1}\end{cases} \tag{13}$$

ここで，$j=1,\ldots,m-1$ である．定義より，$\delta_j=+1,-1$ は，それぞれ，同位相および反位相の隣接する２個の励起格子点を表している．$m-1$ 個の δ_j の内，$+1$ に等しいものの数を d_+，-1 に等しいものの数を d_- で表す．DB 解の存在と線形安定性に関する主結果は，以下のように述べられる．

定理 1． $\sigma\in S$，かつ，$T>0$ は任意に与えられた周期とする．このとき，定数 $\varepsilon_c>0$ が存在し，$0\leq\varepsilon<\varepsilon_c$，かつ，$\mu=0$ のとき，格子系 (5) の T-周期解の族 $\Gamma_\varepsilon(t;\sigma,T)$ で ε と t について解析的，かつ，$\Gamma_0(t;\sigma,T)=\Gamma(t;\sigma,T)$ を満たすものが存在する．各 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_c)$ に対し，ε に依存する $\mu=0$ の近傍 B_ε が存在し，$\mu\in B_\varepsilon$ のとき格子系 (5) の周期解の族 $\Gamma_{\varepsilon,\mu}(t;\sigma,T)$ で μ と t について C^1 級，$\Gamma_{\varepsilon,0}(t;\sigma,T)=\Gamma_\varepsilon(t;\sigma,T)$，周期 $\tau(\mu)$ は C^1 級で $\tau(0)=T$ を満たすものが存在する．さらに，$\Gamma_{\varepsilon,\mu}(t;\sigma,T)$ の線形安定性について以下が成立する．

(i) $m=1$ ならば線形安定，
(ii) 全ての $j\in\{1,\ldots,m-1\}$ に対し $\delta_j=-1$ ならば線形安定，
(iii) d_+ が奇数ならば線形不安定，
(iv) $d_+\geq d_-$ ならば線形不安定．

$2\leq m\leq 5$ の場合に定理 1 を適用すると，完全反位相 ($^\forall j\in\{1,\ldots,m-1\}$ に対し $\delta_j=-1$) なるコード列に対応する解 $\Gamma_{\varepsilon,\mu}(t;\sigma,T)$ のみ線形安定であり，他のコード列に対応する解は線形不安定であることが結論される．一方，$m\geq 6$ の場合は条件 (i)-(iv) に基づいて安定性を判別できないケースが存在する．例えば，$d_+=2,\ d_-=3$．この意味で，条件 (i)-(iv) は完全ではない．

4 準備

同次ポテンシャルを持つハミルトン系において，直線解と呼ばれる周期解に沿った変分方程式には，以下の形をした Hill 方程式が現れる．

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\lambda\varphi(t)^{k-2}\xi=0 \tag{14}$$

ここで，$\xi\in\mathbb{R}$，$\lambda\in\mathbb{R}$ は定数，$k\geq 4$ は偶数，$\varphi(t)$ は (9) 式の T-周期解とする．本節では，Hill 方程式 (14) のモノドロミー行列に関する結果を記述する．

$\{\xi_1(t),\xi_2(t)\}$ を，$t=0$ の近傍で定義された (14) 式の基本解とする．$M(\lambda)$ を，ξ_1 と ξ_2 の 1 周期 T に渡る時間発展を記述するモノドロミー行列とする．すなわち，$M(\lambda)$ は次式を満たす 2×2 行列である．

$$(\xi_1(t+T),\xi_2(t+T))=(\xi_1(t),\xi_2(t))\cdot M(\lambda) \tag{15}$$

与えられたHill方程式に対してモノドロミー行列を解析的に計算することは，一般にはできない．しかしながら，(14)式の形をしたHill方程式の場合には，変数変換により超幾何微分方程式に帰着できることが示されている[22]．この事実により，モノドロミー行列$M(\lambda)$を求めることが可能となる．

(14)式はハミルトン系なので，$M(\lambda) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$であり，その固有値（特性乗数）は$\rho, \rho^{-1}$のようなペアをなす．したがって，$\mathrm{tr}M(\lambda)$の値に依存して以下の4通りの場合があり得る：(i) $|\mathrm{tr}M(\lambda)| < 2$のとき，$\rho = e^{i\theta}$, $\rho^{-1} = e^{-i\theta}$ $(0 < \theta < \pi)$，(ii) $\mathrm{tr}M(\lambda) > 2$のとき，$0 < \rho^{-1} < 1 < \rho$，(iii) $\mathrm{tr}M(\lambda) = 2$のとき，$\rho = \rho^{-1} = +1$，(iv) $\mathrm{tr}M(\lambda) = -2$のとき，$\rho = \rho^{-1} = -1$．実軸上の集合$\mathcal{S}_k$, $\mathcal{U}_k$, $\mathcal{D}_{k,+}$, $\mathcal{D}_{k,-}$を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_k &= \{\lambda \in \mathbb{R}\ ;\ 0 < \lambda < 1 \ \text{ or } \ k-1 < \lambda < k+2 \ \text{ or } \ \ldots \\
&\qquad \text{or } \ j(j-1)k/2 - j + 1 < \lambda < j(j-1)k/2 + j \ \text{ or } \ \ldots, \} \setminus \mathcal{D}_{k,-} \qquad (16) \\
\mathcal{U}_k &= \{\lambda \in \mathbb{R}\ ;\ \lambda < 0 \ \text{ or } \ 1 < \lambda < k-1 \ \text{ or } \ k+2 < \lambda < 3k-2 \ \text{ or } \ \ldots \\
&\qquad \text{or } \ j(j-1)k/2 + j < \lambda < j(j+1)k/2 - j \ \text{ or } \ \ldots\} \qquad (17) \\
\mathcal{D}_{k,+} &= \{0, 1, k-1, \ldots, j(j-1)k/2 + j, j(j+1)k/2 - j, \ldots,\ j \in \mathbb{N}\} \qquad (18) \\
\mathcal{D}_{k,-} &= \{j(j-1)k/2 + (1 - 1/k)/2,\ j \in \mathbb{N}\} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

集合$\mathcal{S}_k$, $\mathcal{U}_k$, $\mathcal{D}_{k,+}$, $\mathcal{D}_{k,-}$は，(i)-(iv)の分類に対応しており，次の補題が成立する[22]．

補題1． モノドロミー行列$M(\lambda)$の固有値について*(i)-(iv)*が成立する．*(i)* $\lambda \in \mathcal{S}_k$のとき$\rho = e^{i\theta}$, $\rho^{-1} = e^{-i\theta}$ $(0 < \theta < \pi)$，*(ii)* $\lambda \in \mathcal{U}_k$のとき$0 < \rho^{-1} < 1 < \rho$，*(iii)* $\lambda \in \mathcal{D}_{k,+}$のとき$\rho = \rho^{-1} = +1$，*(iv)* $\lambda \in \mathcal{D}_{k,-}$のとき$\rho = \rho^{-1} = -1$．

Krein符号理論は，安定な線形ハミルトン系に十分小さな摂動を加えたときに，系が安定性を保つための十分条件を与える．線形シンプレクティック写像の単位円上にある複数の固有値が同じKrein符号を持つ場合，摂動によりそれらが衝突しても不安定化は起きないことが知られている(詳しくは，例えば[23, 24])．$M(\lambda)$の固有値のKrein符号の定義と，関連する補題を述べる．$\lambda \in \mathcal{S}_k$と仮定する．補題1より，$M(\lambda)$の固有値は$\rho = e^{i\theta}$, $\rho^{-1} = e^{-i\theta}$ $(0 < \theta < \pi)$の形となる．ρとρ^{-1}に付随するKrein符号は次式で定義される．

$$
K[\rho, \rho^{-1}] = \mathrm{sgn}\left[(\xi(0), \eta(0)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi(T) \\ \eta(T) \end{pmatrix}\right] \qquad (20)
$$

ここで，$\mathrm{sgn}[x] = x/|x|$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$，$\mathrm{sgn}[0] = 0$である．$\eta \equiv \dot{\xi}$であり，$(\xi, \eta)$はHill方程式(14)の任意の解である．$K[\rho, \rho^{-1}]$が解$(\xi, \eta)$の選び方に依らないこと，および，$\rho = e^{i\theta}$ $(0 < \theta < \pi)$のとき$K[\rho, \rho^{-1}] \neq 0$であることを示すことができる．(14)式に対しては，そのモノドロミー行列$M(\lambda)$が陽に求められる．したがって，$M(\lambda)$の表式を用いて定義式(20)の右辺を計算することにより，以下の補題が示される．

補題2． ρとρ'を，それぞれ，モノドロミー行列$M(\lambda)$と$M(\lambda')$の固有値とする．$\lambda, \lambda' \in (0, L_1) \cup (k-1, k-1+L_2)$ならば，$K[\rho, \rho^{-1}] = K[\rho', \rho'^{-1}]$である．ここで，$L_1 = (1 - 1/k)/2$, $L_2 = (3 - 1/k)/2$．

5 証明の概要

まず，ハミルトン系 (5) が同次ポテンシャル ($\mu = 0$) を持つ場合における周期解の求め方について触れておく．$\mu = 0$ の場合，ハミルトニアン (5) は

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} p_n^2 + \sum_{j=1}^{N/2} \frac{1}{k} \Big[(\varepsilon q_{2j} - q_{2j-1})^k + (q_{2j-1} - \varepsilon q_{2j-2})^k \Big] \tag{21}$$

となる．この系の運動方程式は，次式で与えられる．

$$\ddot{q}_{2j-1} = (\varepsilon q_{2j} - q_{2j-1})^{k-1} - (q_{2j-1} - \varepsilon q_{2j-2})^{k-1} \tag{22}$$

$$\ddot{q}_{2j} = \varepsilon (q_{2j+1} - \varepsilon q_{2j})^{k-1} - \varepsilon (\varepsilon q_{2j} - q_{2j-1})^{k-1} \tag{23}$$

同次系 (21) の周期解を，以下の形を仮定して探す．

$$q_n(t) = u_n \varphi(t) \tag{24}$$

ここで，$u_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$ は定数であり，$\varphi(t)$ は時間変数 t の関数である．全ての $q_n(t)$ に関して，時間依存性を共通の関数 $\varphi(t)$ で記述できると仮定している．(24) 式の形の解を直線解と呼ぶ．(24) 式を運動方程式 (22), (23) に代入すると, 微分方程式

$$\ddot{\varphi} + \varphi^{k-1} = 0 \tag{25}$$

と，以下の連立代数方程式が得られる．

$$u_{2j-1} + (\varepsilon u_{2j} - u_{2j-1})^{k-1} - (u_{2j-1} - \varepsilon u_{2j-2})^{k-1} = 0 \tag{26}$$

$$u_{2j} + \varepsilon (u_{2j+1} - \varepsilon u_{2j})^{k-1} - \varepsilon (\varepsilon u_{2j} - u_{2j-1})^{k-1} = 0 \tag{27}$$

ただし，境界条件 $q_0 = q_N = 0$ に対応して $u_0 = u_N = 0$．3 節で述べたように，任意の $T > 0$ に対し, 微分方程式 (25) は T-周期解を持つ．$\varphi(t)$ を，その T-周期解とする．(25) 式のベクトル場は解析的なので，$\varphi(t)$ は t の解析関数である．したがって，もし代数方程式 (26), (27) の解 $u = (u_1, \ldots, u_{N-1})$ が存在したならば，元の運動方程式 (22), (23) に T-周期解が存在することになる．定理 1 の証明は，以下に記述する step1 から step3 従って行われる．

Step 1: $\varepsilon = 0$, 同次系 $\mu = 0$ の場合．

同次系の anti-continuous limit を考える．すなわち，$\varepsilon = 0$ のときの連立代数方程式 (26), (27) を考える．このとき，方程式は分離して，

$$u_{2j-1} - 2\, u_{2j-1}^{k-1} = 0, \quad u_{2j} = 0 \tag{28}$$

のようになる．次式の形をした解が存在することが容易に分かる．

$$u_{2j-1} = 2^{-1/(k-2)} \sigma_{2j-1}, \quad u_{2j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, N/2 \tag{29}$$

ここで，$\sigma_{2j-1} \in \{-1, 0, 1\}$ である．任意の $\sigma = (\sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{2j-1}, \ldots, \sigma_{N-1}) \in \{-1, 0, 1\}^{N/2}$ に対し，(29) 式は方程式 (28) の解である．与えられた $\sigma \in \{-1, 0, 1\}^{N/2}$ に対する解 (29) を $u_\sigma \in \mathbb{R}^{N-1}$ と表記す

る．u_σ と T-周期解 $\varphi(t)$ を (24) 式に代入すれば，運動方程式 (22), (23) の周期解 $\Gamma(t;\sigma,T)$ が得られる．特に，$\sigma \in S$ とすれば，定理 1 で扱う DB 解となる．

Step 2: $\varepsilon > 0$，同次系 $\mu = 0$ の場合．

Step 1 で構成した DB 解を，同次ポテンシャルに保ったままで $\varepsilon > 0$ の領域に延長する．同次系なので，連立代数方程式 (26), (27) の解の延長のみを考えればよい．(26), (27) 式の左辺を $F(u,\varepsilon)$ と表す．$F : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N-1}$ は，C^ω 関数である．$F(u_\sigma, 0) = 0$，かつ，$\det(\partial F(u_\sigma,0)/\partial u) \neq 0$ であるので，陰関数定理により，$\varepsilon_c > 0$ と C^ω 関数 $u_n(\varepsilon;\sigma)$, $n = 1,\ldots,N-1$ が存在し，$\varepsilon \in (-\varepsilon_c, \varepsilon_c)$ の範囲で $(u_1(\varepsilon;\sigma),\ldots,u_{N-1}(\varepsilon;\sigma))$ は連立代数方程式 (26), (27) を満たし，かつ，$(u_1(0;\sigma),\ldots,u_{N-1}(0;\sigma)) = u_\sigma$ であることが示される．すなわち，代数方程式の解 u_σ は延長可能である．この $u_n(\varepsilon;\sigma)$ を (24) 式に代入すると，延長された DB 解 $\Gamma_\varepsilon(t;\sigma,T)$ が次式のように得られる．

$$q_n(t) = u_n(\varepsilon;\sigma)\varphi(t),\ p_n(t) = u_n(\varepsilon;\sigma)\dot{\varphi}(t), \quad n = 1,2,\ldots,N-1 \tag{30}$$

この定義より明らかに，$\Gamma_\varepsilon(t;\sigma,T)$ は ε と t について解析的であり，周期は T である．$\Gamma_0(t;\sigma,T) = \Gamma(t;\sigma,T)$ となることも明らかである．

次に，直線解 $\Gamma_\varepsilon(t;\sigma,T)$ に関する変分方程式を考え，モノドロミー行列を $\mathcal{M}$ で表す．変分方程式は，次式の形となる．

$$\ddot{\xi} + \varphi(t)^{k-2} G \cdot \xi = 0 \tag{31}$$

式中で，$\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_{N-1})^t$ であり各 ξ_n は座標 q_n 方向の変分を表す．G は，次式のような $(N-1)\times(N-1)$ の対称な 3 重対角定数行列である．

$$G = (k-1)\cdot \begin{pmatrix} c_1+c_2 & -\varepsilon c_2 & & & & \\ -\varepsilon c_2 & \varepsilon^2(c_2+c_3) & -\varepsilon c_3 & & & \\ & -\varepsilon c_3 & c_3+c_4 & -\varepsilon c_4 & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & -\varepsilon c_{N-2} & \varepsilon^2(c_{N-2}+c_{N-1}) & -\varepsilon c_{N-1} \\ & & & & -\varepsilon c_{N-1} & c_{N-1}+c_N \end{pmatrix} \tag{32}$$

ここで，c_n は以下のように定義される定数である．

$$c_n = \begin{cases} \left(u_n(\varepsilon;\sigma) - \varepsilon u_{n-1}(\varepsilon;\sigma)\right)^{k-2} & \text{if } n = 2j-1 \\ \left(\varepsilon u_n(\varepsilon;\sigma) - u_{n-1}(\varepsilon;\sigma)\right)^{k-2} & \text{if } n = 2j \end{cases} \tag{33}$$

行列 G の固有値を，λ_i, $i = 1,\ldots,N-1$ とする．G は実対称行列なので，固有値 λ_i は全て実数であり，直交行列 T_G が存在し G は対角化される．新しい変数 $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_{N-1})^t$ を変換 $\xi = T_G \cdot \zeta$ により導入すると，(31) 式は $N-1$ 個の 1 変数 2 階微分方程式に分離される．その各方程式は (14) 式と同じ形をした次式となる．

$$\ddot{\zeta}_i + \lambda_i \varphi(t)^{k-2} \zeta_i = 0 \tag{34}$$

ρ_i, ρ_i^{-1} を (34) 式のモノドロミー行列 $M(\lambda_i)$ の固有値とする．変分方程式 (31) は分離されるため，その

モノドロミー行列 $\mathcal{M}$ は，以下のようなブロック対角行列となる．

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M(\lambda_1) & & & \\ & M(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M(\lambda_{N-1}) \end{pmatrix} \tag{35}$$

この行列構造より，$\mathcal{M}$ の固有値の全体は $\mathrm{spec}\mathcal{M} = \{\rho_1, \rho_1^{-1}, \rho_2, \rho_2^{-1}, \ldots, \rho_n, \rho_n^{-1}\}$ で与えられる．したがって，$\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N-1$ を評価して補題1を適用すれば，$\mathcal{M}$ の特性乗数分布が得られる．

以下では，$\varepsilon \in (0, \varepsilon_c)$ とし，ε_c は充分小さく取るものとする．行列 G の固有値 λ_i の評価について述べる．(29) と (32) 式より，$\varepsilon = 0$ のとき $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = k-1$, $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_{N-1} = 0$ であることは容易に分かる．$\varepsilon > 0$ のとき G が正定値であることを示すことができるので，任意の i について $\lambda_i > 0$ となる．よって，固有値の ε に関する連続性より，$\lambda_i \in (0, L_1) \subset \mathcal{S}_k$, $i = m+1, \ldots, N-1$ がまず分かる．他の固有値の内1つは $\Gamma_\varepsilon(t; \sigma, T)$ の解軌道に接する方向の特性乗数に対応し，ε の値に依らず $k-1$ に等しいことが示される．これを，$\lambda_m = k-1$ としておく．これらの結果から，$m = 1$ の場合は，補題1より直ちに $\rho_1 = +1$ と $|\rho_i| = 1$, $\rho_i \neq \pm 1$, $i = 2, \ldots, N-1$ が得られる．補題2より，特性乗数 ρ_i, ρ_i^{-1} $(i \neq 1)$ は同一の Krein 符号を持つ．

$m \geq 2$ の場合における残りの固有値 $\lambda_i = k-1$, $i = 1, \ldots, m-1$ は，ε に関する摂動計算により評価する．G は ε に関し解析的な対称行列なので，固有値は ε の解析関数となる [25]．よって，$k-1$ から分離する固有値に対して，冪級数展開 $\lambda = (k-1)[1 + x\varepsilon + y\varepsilon^2 + \cdots]$ を仮定する．計算の後に，$x = 0$ と，y に関する方程式 $\Phi_m(y) = 0$ が得られる．ここで，$\Phi_m(y)$ は次のように定義される $(2m+1) \times (2m+1)$ 行列の行列式である．

$$\Phi_m(y) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & & & & \\ \frac{1}{2} & y+\alpha_1 & \frac{1}{2} & & & & \\ & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{2} & y+\alpha_m & \frac{1}{2} \\ & & & & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \tag{36}$$

ここで，$\alpha_j = (2 + \delta_{j-1} + \delta_j)/4$ である．ただし，$\delta_0 = \delta_m = 0$. この定義式に基づいて計算すると，$\Phi_1(y) = y$, $\Phi_2(y) = y(y + \delta_1/2)$ が得られる．$\Phi_m(y)$ $(m \geq 3)$ に対しては以下の漸化式が得られる．

$$\Phi_m(y) = \left(y + \frac{\delta_{m-1}}{4}\right)\Phi_{m-1}(y) + y\sum_{j=1}^{m-1}\left(\prod_{n=0}^{j-1}\frac{\delta_{m-1-n}}{4}\right)\Phi_{m-1-j}(y) \tag{37}$$

$\Phi_1(0) = \Phi_2(0) = 0$ であるので，漸化式 (37) より，$\Phi_m(0) = 0$ が得られる．すなわち，方程式 $\Phi_m(y) = 0$ は $y = 0$ を解に持つ．方程式 $\Phi_m(y) = 0$ の m 個の解を y_i, $i = 1, \ldots, m$ で表し，$y_m = 0$ とする．$y_m = 0$ は，$\lambda_m = k-1$ に対応している．他の解について，(37) 式より以下の関係式が得られる．

$$\prod_{i=1}^{m-1} y_i = (-1)^{m-1}\frac{m}{4^{m-1}}\prod_{j=1}^{m-1}\delta_j \tag{38}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} y_i = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\delta_j \tag{39}$$

$\delta_j = \pm 1 \neq 0,\ j = 1, \ldots, m-1$ より (38) 式の右辺は 0 ではないので，$y_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, m-1$ であることが分かる．よって，$i = 1, \ldots, m-1$ に対し $\lambda_i \neq k-1$．補題 1 から，これらに対応する特性乗数は $\rho_i \neq +1$ なので，特性乗数 $+1$ の重複度は 2 である．

d_+ が奇数の場合を考える．(38) 式の右辺は負となるので，少なくとも 1 つ負の解 $y_i < 0$ が存在しなければならない．対応する λ_i は，小さな ε に対し，$\lambda_i \in (1, k-1) \subset \mathcal{U}_k$ となる．補題 1 により，不安定な特性乗数 $\rho_i > 1$ が存在することになる．

$d_+ \geq d_-$ の場合を考える．(39) 式の右辺は 0 以下となる．左辺において $y_i \neq 0$ なので，少なくとも 1 つ負の解 $y_i < 0$ が存在しなければならない．先と同様に，小さな ε に対し $\lambda_i \in (1, k-1) \subset \mathcal{U}_k$ となり，不安定な特性乗数 $\rho_i > 1$ が存在することになる．

最後に $^\forall\delta_j = -1$ の場合を考える．まず，$^\forall y < 0$ に対して，$\mathrm{sgn}[\Phi_1(y)] = -1$ と $\mathrm{sgn}[\Phi_2(y)] = (-1)^2$ が得られる．これらから (37) 式を用いて帰納的に，$\mathrm{sgn}[\Phi_m(y)] = (-1)^m$ が得られる．これは負の解が存在しないことを示しているので，$y_i > 0,\ i = 1, \ldots, m-1$ である．よって，小さな ε に対し，$\lambda_i \in (k-1, k-1+L_2) \subset \mathcal{S}_k$ が $i = 1, \ldots, m-1$ について成立する．先の結果 $\lambda_m = k-1$, $\lambda_i \in (0, L_1) \subset \mathcal{S}_k$, $i = m+1, \ldots, N-1$ と併せて補題 1 を適用すれば，$\rho_m = +1$ と $|\rho_i| = 1$, $\rho_i \neq \pm 1\ (i \neq m)$ が得られる．さらに，補題 2 によれば，$+1$ 以外の特性乗数 ρ_i, $\rho_i^{-1}\ (i \neq m)$ は同一の Krein 符号を持つことが分かる．

Step 3: $\varepsilon > 0$，非同次系 $\mu \neq 0$ の場合．

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_c)$ を固定する．周期解 $\Gamma_\varepsilon(t; \sigma, T)$ の特性乗数 $+1$ の重複度が 2 であるので，周期解の延長定理（例えば，[26]）により，$\mu = 0$ の近傍 $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^l$ が存在し，$\mu \in B_\varepsilon$ に対して周期 $\tau(\mu)$ を持つ周期解の族 $\Gamma_{\varepsilon,\mu}(t; \sigma, T)$ で $\Gamma_{\varepsilon,0}(t; \sigma, T) = \Gamma_\varepsilon(t; \sigma, T)$，$\tau(0) = T$ となるものが存在する．摂動ポテンシャル W によるベクトル場が C^1 級となるので，$\Gamma_{\varepsilon,\mu}(t; \sigma, T)$ は μ と t について C^1 級，かつ，$\tau(\mu)$ も C^1 級となる．

特性乗数は μ に連続的に依存するので，d_+ が奇数，もしくは，$d_+ \geq d_-$ の場合，B_ε を十分小さく取っておけば，$\mu \in B_\varepsilon$ のとき $|\rho_i| > 1$ なる特性乗数が存在し $\Gamma_{\varepsilon,\mu}(t; \sigma, T)$ は線形不安定．次に，$m = 1$，もしくは，$^\forall\delta_j = -1$ の場合を考える．$\rho_m = \rho_m^{-1} = +1$ は，μ に依らず不変である．他の縮退していない特性乗数は，μ の微小変化の下で明らかに単位円上にとどまる．$+1$ 以外の縮退している特性乗数が在る場合も，$\mu = 0$ のときそれらの特性乗数は同一 Krein 符号を持つので，μ を微小変化させたときに Krein collision による不安定化は起き得ない [23, 24]．以上より，$\Gamma_{\varepsilon,\mu}(t; \sigma, T)$ は線形安定性．

参考文献

[1] S. Takeno, K. Kisoda, and A. J. Sievers, "Intrinsic localized vibrational modes in anharmonic crystals: stationary modes," Prog. Theor. Phys. Suppl. 94, 242–269 (1988).

[2] A. J. Sievers and S. Takeno, "Intrinsic localized modes in anharmonic crystals," Phys. Rev. Lett. 61, 970–973 (1988).

[3] S. Aubry, "Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization," Physica D 103, 201–250 (1997).

[4] S. Flach and C. Willis, "Discrete breathers," Phys. Rep. 295, 181–264 (1998).

[5] S. Aubry, "Discrete breathers: localization and transfer of energy in discrete Hamiltonian nonlinear systems," Physica D 216, 1–30 (2006).

[6] S. Flach and A. V. Gorbach, "Discrete breathers - Advances in theory and applications," Phys. Rep. 467, 1–116 (2008).

[7] E. Trias, J. J. Mazo, and T. P. Orlando, "Discrete breathers in nonlinear lattices: Experimental detection in a Josephson array," Phys. Rev. Lett. 84, 741–744 (2000).

[8] P. Binder, D. Abraimov, A. V. Ustinov, S. Flach, and Y. Zolotaryuk, "Observation of breathers in Josephson ladders," Phys. Rev. Lett. 84, 745–748 (2000).

[9] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, and J. S. Aitchison, "Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays," Phys. Rev. Lett. 81, 3383-3386 (1998).

[10] M. Sato, B. E. Hubbard, A. J. Sievers, B. Ilic, D.A. Czaplewski, and H. G. Craighead, "Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array," Phys. Rev. Lett. 90, 044102 (2003).

[11] R. S. MacKay and S. Aubry, "Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators," Nonlinearity 7, 1623–1643 (1994).

[12] V. Koukouloyannis and S. Ichtiaroglou, "Existence of multibreathers in chains of coupled one-dimensional Hamiltonian oscillators," Phys. Rev. E 66, 066602 (2002).

[13] R. Livi, M. Spicci, and R. S. MacKay, "Breathers on a diatomic FPU chain," Nonlinearity 10, 1421–1434 (1997).

[14] S. Flach, "Existence of localized excitations in nonlinear Hamiltonian lattices," Phys. Rev. E 51, 1503–1507 (1995).

[15] S. Aubry, G. Kopidakis, and V. Kadelburg, "Variational proof for hard discrete breathers. in some classes of Hamiltonian dynamical systems," Discrete and Continuous Dynamical Systems B 1, 271-298 (2001).

[16] G. James, "Centre Manifold reduction for quasilinear discrete systems," J. Nonlinear Sci. 13, 27–63 (2003).

[17] G. James and P. Noble, "Breathers on diatomic Fermi-Pasta-Ulam lattices," Physica D 196, 124–171 (2004).

[18] J. F. R. Archilla, J. Cuevas, B. Sánchez-Rey, and A. Alvarez, "Demonstration of the stability or instability of multibreathers at low coupling," Physica D 180, 235–255 (2003).

[19] J. Cuevas, J. F. R. Archilla, F. R. Romero, "Effect of the introduction of impurities on the stability properties multibreathers at low coupling," Nonlinearity 18, 769-790 (2005).

[20] V. Koukouloyannis and P. G. Kevrekidis, "On the stability of multibreathers in Klein-Gordon chains," Nonlinearity 22, 2269-2285 (2009).

[21] 吉村 和之, "２原子非線形格子における Discrete Breather の存在と安定性," 数理解析研究所講究録 1645 「非線形波動現象の数理と応用」, 72-79 (2009).

[22] H. Yoshida, "Existence of exponetially unstable periodic solutions and the non-integrability of homogeneous Hamiltonian systems," Physica D 21, 163–170 (1986).

[23] V. I. Arnold and A. Avez, *Ergodic problem of classical mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 1978).

[24] R. S. MacKay and J. -A. Sepulchre, "Stability of discrete breathers," Physica D 119, 148–162 (1998).

[25] 加藤 敏夫, 行列の摂動, (Springer-Verlag, Tokyo, 1999).

[26] K. R. Mayer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and N-body problem*, (Springer-Verlag, New York, 1992).